数理解析研究所講究録
502巻 1983年 123-141

Les résolvantes des noyaux continus réels vérifiant le principe semi-complet du maximum

Noriaki SUZUKI (広大・理 鈴木紀明)

§1. Introduction

Soit X un espace localement compact, non-compact, séparé et dénombrable à l'infini. Nous disquterons les noyaux continus réels V sur X. Dans la théorie du potentiel, il est bien connu que le principe complet du maximum de V est une condition essentielle pour que V soit un noyau de Hunt dont le semi-groupe est sous-markovien. D'autre part, le noyau logarithmique sur l'espace euclidien R^2 à 2 dimensions ne satisfait pas au principe complet du maximum, mais il satisfait au principe semi-complet du maximum. Donc, il semble aussi bien que les noyaux continus réels vérifiant le principe semi-complet du maximum ont propriétés intéressantes même du noyau logarithmique. En effet, dans le cas des noyaux de convolution sur un groupe localement compact, M. Itô montre que tels noyaux sont de type logarithmique s'ils vérifient une certaine condition à l'infini (voir [3] et [4]). D'autre part, dans le cas où X est un emsemble dénombrable, R. Kondo a montré un résultat analogue en utilisant la méthode probablistique (voir [5]).

Le but de cet article est de montrer le théorème suivant:

Théorème. Soit V un noyau continu réel sur X et m une mesure de Radon positive fixée à supp(m) = X. Supposons les quatre conditions suivantes:

(A) V vérifie le principe semi-complet du maximum par rapport à m.

(B) Soit c une constante positive quelconque. Si, pour tous $\mu \in D^0(V^*)$ et $a \in R$, $(V^*+cI)\mu \leq am$ (resp. $(V^*+cI)\mu = 0$) sur X, alors $a \geq 0$ (resp. $\mu = 0$), où V^* est le noyau transposé de V et I est l'opérateur identique.

(C) Pour toute $f \in C_K^0(X)$, $Vf \in C_0(X)$.

(D) Pour toute $0 \neq f \in C_K^+(X)$, $\lim_{x\to\delta} Vf(x) = -\infty$, où δ est la point d'Alexandoroff de X.

Alors il existe une résolvante markovienne $(V_p)_{p>0}$ des noyaux continus sur X telle que:

(1) Pour tous $f \in C_K^0(X)$ et $p > 0$, on a

$$Vf = V_pf + pV_pf.$$

(2) La résolvante $(V_p^*)_{p>0}$ des noyaux transposés de $(V_p)_{p>0}$ est uniformément récurrente et toute la mesure invariante par rapport à pV_p^* est proportionnelle à m.

(3) Pour tout $p > 0$, V_p^* est un noyaux de Hunt faiblement régulier et il existe un semi-groupe markovien $(T_t)_{t\geq 0}$, et un seul tel que, pour toute $f \in C_K(X)$, $V_pf = \int \exp(-pt)T_tfdt$.

(4) Si $\int dm = \infty$, alors, pour toute $f \in C_K^0(X)$, $\lim_{p\to 0} V_pf = Vf$ uniformément sur X.

On note que la résolvante $(V_p)_{p>0}$ est uniquement déterminée (voir la remarque 10). Dans ce cas, elle s'appelle la résolvante de V.

§2. Définitions et préliminaires

Dans cet article, m est une mesure de Radon positive fixée sur X telle que $supp(m)$, le support de m, est égale à X.

On désigne par:

$C(X)$ l'espace de Fréchet usuel des fonctions finies et continues sur

X;

$C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues sur X à support compact;

$M(X) = C_K(X)^*$ l'espace vectoriel topologique des mesures de Radon réelles sur X muni de la topologie vague;

$M_K(X) = C(X)^*$ l'espace vectoriel topologique des mesures de Radon réelles sur X à support compact;

$C_0(X)$ le sous-ensemble des fonctions de $C(X)$ tendant vers 0 à l'infini;

$C^+(X)$, $C_K^+(X)$, $M^+(X)$, $M_K^+(X)$ et $C_0^+(X)$ leur sous-ensembles des éléments non-négatifs;

$C^0(X) = \{f \in C(X);\ \int|f|dm < \infty,\ \int fdm = 0\}$;

$M^0(X) = \{\mu \in M(X);\ \int d|\mu| < \infty,\ \int d\mu = 0\}$;

$C_K^0(X) = C_K(X) \cap C^0(X)$ et $M_K^0(X) = M_K(X) \cap M^0(X)$.

Un noyau continu réel sur X (resp. un noyau de diffusion réel sur X) est, par définition, une application linéaire et continue de $C_K(X)$ dans $C(X)$ (resp. de $M_K(X)$ dans $M(X)$). Desormais, pour un noyau continu réel V (resp. un noyau de diffusion réel V^*), nous désignerons par V^* le noyau transposé de V (resp. V le noyau continu transposé de V^*) défini par

$$\int fdV^*\mu = \int Vfd\mu$$

pour $f \in C_K(X)$ et $\mu \in M_K(X)$.

Posons

$$D(V^*) = \left\{\mu \in M(X);\ \begin{array}{l} C_K(X) \ni f \to \int Vfd\mu \text{ définit} \\ \text{une mesure de Radon} \end{array}\right\},$$

$D^0(V^*) = D(V^*) \cap M^0(X)$ et $D^+(V^*) = D(V^*) \cap M^+(X)$. Pour $\mu \in D(V^*)$, on note $\int Vfd\mu = \int fdV^*\mu$ pour toute $f \in C_K(X)$.

Définition 1. On dit que V vérifie <u>le principe semi-complet du maximum</u> par rapport à m (désigné par $V \in$ (PSM)) si, pour $f \in C_K^0(X)$ et $a \in R$ quelconques, $Vf \leq a$ sur X dès que la même inégalité a lieu sur $\mathrm{supp}(f^+)$, où R désigne la doroite réelle.

Définition 2. Soit V^* un noyau de diffusion sur X et $\mu \in D^+(V^*)$. On dit que μ est <u>invariante</u> par rapport à V^* si $V^*\mu = \mu$.

Définition 3 (voir [6], Définition 1). On dit qu'une résolvante $(V_p^*)_{p>0}$ [1] est <u>uniformément récurrente</u> s'il existe une famille $(u_p)_{p>0} \subset C^+(X)$ et $p_o > 0$ vérifiant les quatre conditions suivantes:

(a) $u_p > 0$ sur X pour tout $p > 0$.

(b) $\lim_{p\to 0} u_p(x) = 0$ pour tout $x \in X$.

(c) Pour toute $f \in C_K^+(X)$, $(u_p V_p f)_{p_o > p > 0}$ forme une famille normale sur tout compact de X.

(d) Pour tout $x \in X$, il existe $f \in C_K^+(X)$ telle que

$$\inf_{p_o > p > 0} u_p(x) V_p f(x) > 0.$$

Définition 4 (voir [2], p.303-304). On dit que V^* est <u>un noyau de Hunt faiblement régurier</u> si:

---

(1) Une famille $(V_p)_{p>0}$ des noyaux continus (resp. $(V_p^*)_{p>0}$ des noyaux de diffusion) sur X s'appelle une résolvante si, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$V_p - V_q = (q-p)V_pV_q \quad (\text{resp. } V_p^* - V_q^* = (q-p)V_p^*V_q^*) \quad (\text{Equation résolvante})$$

On dit que $(V_p)_{p>0}$ est markovienne si, pour $p > 0$ et $x \in X$ quelconques, $p\int dV_p^*\varepsilon_x = 1$, où on désigne par ε_x la mesure d'unité à x.

(H.1) Il existe un semi-groupe $(T_t^*)_{t>0}$ [2] des noyaux de diffusion tel que $V^* = \int T_t^* dt$, c'est-à-dire, pour $\mu \in M_K(X)$ et $f \in C_K(X)$ quelconques, $\int f dV^*\mu = \int dt \int f dT_t^*\mu$.

(H.2) $B_m^{V^*}(\mu;\omega)$ [3] $\neq \emptyset$ pour tout l'ouvert ω et $\mu \in M_K^+(X)$.

(H.3) Pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, la plus grande fonction V-sousharmonique minorante de Vf sur X s'annule identiquement et V posséde la propriété de la régularisation inférieure; c'est-à-dire, soit Ω un ouvert et u une fonction réelle et borélienne vérifiant $|u(x)| \leq Vg(x)$ avec une certaine $g \in C_K^+(X)$. Si, pour $x \in \Omega$, compact $K \subset \Omega$ et $\varepsilon'_{x,CK} \in B^{V^*}(\varepsilon_x;CK)$ quelconques, $u(x) \geq \int u d\varepsilon'_{x,CK}$, alors $\underline{u}(x) = \liminf_{y\to x} u(y)$ est V-surharmonique dans Ω, où on désigne par ε_x la mesure d'unité à x.

Ici, une fonction réelle et borélienne sur X est dite V-surharmonique dans Ω si u est semi-continue inférieurement et si, pour tout $x \in \Omega$ et compact $K \subset \Omega$, $u(x) \geq \int u d\varepsilon'_{x,CK}$, où $\varepsilon'_{x,CK} \in B_m^{V^*}(\varepsilon_x;CK)$.

Si $-u$ est V-surharmonique dans Ω, alors u est dite V-sousharmonique dans Ω.

---

(2) Une famille $(T_t)_{t\geq 0}$ des noyaux continus (resp. $(T_t^*)_{t\geq 0}$ des noyaux de diffusion) sur X s'appelle un semi-groupe si $T_0 = I$, $T_t T_s = T_{t+s}$ pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$ et $R \ni t \to T_t f \in C(X)$ est continue pour toute $f \in C_K(X)$ (resp. $T_0^* = I$, $T_t^* T_s^* = T_{t+s}^*$ pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$ et $R \ni t \to T_t^*\mu \in M(X)$ est continue pour toute $\mu \in M_K(X)$).

On dit que $(T_t)_{t\geq 0}$ est markovien si, pour tous $t \geq 0$ et $x \in X$ quelconques, $\int dT_t^*\varepsilon_x = 1$.

(3) Pour tout ouvert ω dans X et toute $\mu \in M_K^+(X)$, on désigne par $B^{V^*}(\mu;\omega)$ l'ensemble des mesures μ' vérifiant les conditions suivantes;

(B.1) $\mu' \in D^+(V^*)$ et $\operatorname{supp}(\mu') \subset \overline{\omega}$,

(B.2) $V^*\mu' = V^*\mu$ dans ω,

(B.3) $V^*\mu' \leq V^*\mu$ dans X.

On pose encore $B_m^{V^*}(\mu;\omega) = \{\mu' \in B^{V^*}(\mu;\omega)$; pour $\nu \in D^+(V^*)$ vérifiant $\operatorname{supp}(\nu) \subset \overline{\omega}$ quelconque, on a $V^*\mu' \leq V^*\nu$ dans X dès que $V^*\mu \leq V^*\nu$ dans $\omega\}$.

De la même manière que dans la remarque 5 et la proposition 11 dans [3], on aura la proposition suivante:

Proposition 5. Soit $V \in (PSM)$ et c une constante ≥ 0. Alors on a:

(1) $V+cI$ vérifie le principe semi-complet du maximum transitif à V; c'est-à-dire, pour $f \in C_K^0(X)$ et $a \in R$ quelconques, $Vf \leq a$ sur X dès que $(V+cI)f \leq a$ sur $\mathrm{supp}(f^+)$.

(2) V^*+cI vérifie le principe du semi-balayage relatif à V^*; c'est-à-dire, pour $\mu \in M_K^+(X)$ et un ouvert relativement compact $\omega \neq \phi$ dans X quelconques, il existe $\mu'_\omega \in M_K^+(X)$ et $a'_\omega \in R$ tels que:

(SB.1) $$\int d\mu'_\omega = \int d\mu.$$

(SB.2) $$\mathrm{supp}(\mu'_\omega) \subset \overline{\omega}.$$

(SB.3) $$(V^*+cI)\mu'_\omega + a'_\omega m = V^*\mu \quad \text{dans} \quad \omega.$$

(SB.4) $$(V^*+cI)\mu'_\omega + a'_\omega m \leq V^*\mu \quad \text{dans} \quad X.$$

Dans ce cas, μ'_ω (resp. a'_ω) s'appelle une mesure semi-balayée (resp. une constante semi-balayée) de μ sur ω relativement à (V^*+cI, V^*).

§3. La preuve du théorème

Dans ce paragraph, on supposera toujours que V vérifie toutes les conditions dans le théorème.

D'abord on va construire la résolvante de V. Pour cela, la proposition suivante est essentielle.

Proposition 6. Soit $c \geq 0$. Pour $\mu \in M_K^+(X)$ et un ouvert $\omega \neq \phi$ dans X quelconques, il existe $\mu'_\omega \in D^+(V^*)$ et $a'_\omega \in R$ vérifiant (SB.1), (SB.2), (SB.3) et (SB.4).

Preuve. Soit $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ une exhaustion de ω, c'est-à-dire, $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ est une famille d'ouverts relativement compacts $\neq \phi$ dans X vérifiant

$\overline{\omega}_n \subset \omega_{n+1}$ et $\cup_{n=1}^{\infty} \omega_n = \omega$. On connaît déjà que pour tout $n \geq 1$, il existe $\mu'_n \in M_K^+(X)$ et $a'_n \in R$ tels que $\int d\mu'_n = \int d\mu$, $\mathrm{supp}(\mu'_n) \subset \overline{\omega}_n$ et

$$(3.1) \qquad \begin{cases} V^*\mu = (V^*+cI)\mu'_n + a'_n m & \text{dans } \omega_n \\ V^*\mu \geq (V^*+cI)\mu'_n + a'_n m & \text{dans } X. \end{cases}$$

(voir la proposition 5 (2)). Comme $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty} \subset M^+(X)$ est vaguement bornée, on peut supposer que $\lim_{n\to\infty} \mu'_n$ existe dans $M^+(X)$. Posons

$$(3.2) \qquad \lambda = \lim_{n\to\infty} \mu'_n.$$

Alors $\mathrm{supp}(\lambda) \subset \overline{\omega}$.

Montrons que

$$(3.3) \qquad (a'_n)_{n=1}^{\infty} \text{ est bornée.}$$

Comme $V^*(\mu-\mu'_n) \geq a'_n m$ sur X et $\int d\mu = \int d\mu'_n$, on voit $a'_n \leq 0$. Soit $f \in C_K^+(X)$ telle que $\int f dm = 1$ et $\mathrm{supp}(f) \subset \omega_1$. Alors,

$$a'_n = \int Vf d\mu - \int (Vf+cf) d\mu'_n \geq \int Vf d\mu - \int ((Vf)^+ + cf) d\mu'_n.$$

Comme $(Vf)^+ \in C_K^+(X)$ et $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée, $\liminf_{n\to\infty} a'_n > -\infty$. On a ainsi (3.3).

Montrons que

$$(3.4) \qquad (V^*\mu'_n)_{n=1}^{\infty} \text{ est relativement compact dans } M(X).$$

Il suffit de montrer que $(V^*\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Soit $f \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}(f) \subset \omega$; alors l'égalité $V^*\mu = \lim_{n\to\infty} (V^*cI)\mu'_n + a'_n m$ sur ω et (3.3) montrent que $(\int f dV^*\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Pour $g \in C_K^+(X)$ quelconque, on choisit $f \in C_K^+(X)$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset \omega$ et $g-f \in C_K^0(X)$. D'après la condition (C) dans le théorème, $(\int V(g-f) d\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Ainsi $(\int g dV^*\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

Montrons

$$(3.5) \qquad \lambda \in D^{+}(V^{*}).$$

Pour (3.5) il suffit de montrer que, pour un compact K dans X et $f \in C_K(X)$ à $\mathrm{supp}(f) \subset K$ quelconques, qu'il existe une constante $c(K) > 0$ vérifiant $|\int Vfd\lambda| \leq c(K)\|f\|_\infty$. Pour toute $f \in C_K^+(X)$, (3.4) donne $|\int Vfd\lambda| < \infty$. On peut supposer que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Soit $f_o \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}(f_o) \subset K$ et $\int f_o dm = 1$ quelconque fixée. Pour toute $f \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}(f) \subset K$, on pose $a_f = \int fdm$. Alors $0 \leq a_f \leq m(K)\|f\|_\infty$. Comme $\mathrm{supp}((Vf_o)^+)$ est compact, il existe une constante $M > 0$ telle que $Vf_o \leq M$ sur X. La continuité de V implique $\max_{x\in K} |Vf(x)| \leq c_o\|f\|_\infty$ pour toute f ci-dessus avec une constante $c_o > 0$. En posant $M_o = \max\{M, \max_{x\in K} |Vf_o(x)|\}m(K)$, on a

$$(3.6) \qquad Vf \leq V(a_f f_o) + M_o\|f\|_\infty + c_o\|f\|_\infty \quad \text{sur} \quad K \supset \mathrm{supp}(f).$$

Comme $V \in$ (PSM), la même inégalité a lieu sur X, et donc

$$\int Vfd\lambda \leq (2M_o+c_o)\|f\|_\infty \int d\lambda.$$

D'autre part, (3.4) montre qu'il existe $c_1 \leq 0$ telle que $\sup_{n\geq 1} \int Vfd\mu'_n \geq c_1\|f\|_\infty$, et donc $c_1\|f\|_\infty \leq \int Vfd\lambda$, d'où (3.5).

Montrons

$$(3.7) \qquad \int d\lambda = \int d\mu.$$

Evidemment $\int d\lambda \leq \int d\mu$ et l'on suppose $\int d\lambda < \int d\mu$. Comme $\lim_{n\to\infty} \mu'_n = \lambda$ et $\int d\mu'_n = \int d\mu$, il existe $\delta > 0$ telle que pour tout compact K il existe un entier $n_K \geq 1$ vérifiant

$$\int_{CK} d\mu'_n < \delta \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_K.$$

Soit $f \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}(f) \subset \omega_1$ et à $\int fdm = 1$. Posons

$$M = \inf_{n\geq 1} \{\int Vfd\mu - \int (Vf)^+ d\mu'_n - a'_n - c\int fd\mu'_n\},$$

alors $-\infty < M = \inf_{n\geq 1} \{\int (Vf - (Vf)^+)d\mu'_n\} \leq 0$. On choisit un compact $K_o \subset X$ tel que

$$K_o \supset \mathrm{supp}((Vf)^+) \quad \text{et} \quad Vf < 2M/\delta \quad \text{sur} \quad CK_o.$$

Dans ce cas, pour tout $n \geq n_{K_o}$,

$$M \leq \int (Vf - (Vf)^+)d\mu'_n \leq \int_{CK_o} Vfd\mu'_n < 2M,$$

mais cela en contradiction avec $M \leq 0$, d'où $\int d\lambda = \int d\mu$.

D'après (3.3) et (3.4), on peut suposer que $\lim_{n\to\infty} V^*\mu'_n$ (dans $M(X)$) et $\lim_{n\to\infty} a'_n$ existent. Posons $\eta = \lim_{n\to\infty} V^*\mu'_n$ et $a' = \lim_{n\to\infty} a'_n$. Soit $g \in C_K^0(X)$ quelconque. Comme $Vg \in C_0(X)$, on a

$$\int gd\eta = \lim_{n\to\infty} \int gdV^*\mu'_n = \lim_{n\to\infty} \int Vgd\mu'_n = \int Vgd\lambda = \int gdV^*\lambda.$$

Donc il existe une constante a_o telle que

$$\eta = V^*\lambda + a_o m. \tag{3.8}$$

Posons $\mu'_\omega = \lambda$ et $a'_\omega = a_o + a'$; alors on obtient facilement que (μ'_ω, a'_ω) est un couple demandé et la proposition 6 est démontrée.

Remarque 7. (1) La condition (B) dans le théorème donne $a'_\omega \leq 0$, car $V^*(\mu-\mu'_\omega) \geq a'_\omega m$.

(2) Si $\omega = X$, alors μ'_ω et a'_ω sont déterminées uniquement.

(3) De la même manière, il existe aussi un couple analogue (μ'_ω, a'_ω) pour toute $\mu \in D(V^*) \cap M_b^+(X)$, où $M_b^+(X) = \{\mu \in M^+(X); \int d\mu < \infty\}$. Dans ce cas, μ'_ω (resp. a'_ω) s'appelle aussi une mesure semi-balayée (resp. une constante semi-balayée) de μ sur ω relativement à (V^*+cI, V^*).

Dès maintenant, on construira la résolvante demandée.

Soit $p > 0$ quelconque fixé. D'après la remarque 7 (2), on définit l'opérateur linéaire

$$V_p^*: M_K(X) \ni \mu \to \frac{1}{p}\{(\mu^+)'_{X,p} - (\mu^-)'_{X,p}\} \in M(X)$$

où $(\mu^+)'_{X,p}$ et $(\mu^-)'_{X,p}$ sont les mesures semi-balayées de μ^+ et de μ^- sur X relativement à $(V^*+\frac{1}{p}I, V^*)$.

Lemme 8. L'opérateur V_p^* est un noyau de diffusion sur X.

Preuve. Comme V_p^* est positif (c'est-à-dire, $V_p^*\mu \in M^+(X)$ dès que $\mu \in M_K^+(X)$), il suffit de montrer que pour $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ et $x \in X$ satisfiant à $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ quelconques,

$$\lim_{n\to\infty} V_p^*\varepsilon_{x_n} = V_p^*\varepsilon_x \quad \text{dans } M(X).$$

D'abord, on a

$$V^*\varepsilon_{x_n} = (pV^*+I)V_p^*\varepsilon_{x_n} + a'_n m \quad \text{sur } X$$

avec une constante $a'_n \leq 0$. Soit $f \in C_K^+(X)$ à $\int f dm = 1$, alors

$$a'_n = Vf(x_n) - p\int Vf dV_p^*\varepsilon_{x_n} - \int f dV_p^*\varepsilon_{x_n}.$$

Comme $(x_n)_{n=1}^\infty$ est relativement compact et $|\int f dV_p^*\varepsilon_{x_n}| \leq \frac{1}{p}\|f\|_\infty$, on a $\liminf_{n\to\infty} a'_n > -\infty$ aussi bien que dans (3.3), et donc $(a'_n)_{n=1}^\infty$ est bornée.

Soit λ un point vaguement adhérent de $(V_p^*\varepsilon_{x_n})_{n=1}^\infty$ lorsque $n \to \infty$. De la même manière que dans (3.5), (3.7) et (3.8), on a aussi $\lambda \in D^+(V^*)$, $p\int d\lambda = 1$ et $V^*\varepsilon_x = (pV^*+I)\lambda + a'm$ avec une constante a'. Comme $V^*\varepsilon_x = (pV^*+I)V_p^*\varepsilon_x + a'_x m$ avec une constante $a'_x \leq 0$,

$$(pV^*+I)(\lambda - V_p^*\varepsilon_x) = (a'_x - a')m \quad \text{sur } X,$$

et donc, d'après la condition (B) dans le théorème, $\lambda = V_p^*\varepsilon_x$, car $\int d\lambda = \int dV_p^*\varepsilon_x = \frac{1}{p}$. Comme λ est un point vaguement adhérent de $(V_p^*\varepsilon_{x_n})_{n=1}^\infty$

quelconque, $\lim_{n\to\infty} V^*_p\varepsilon_{x_n} = V^*_p\varepsilon_x$. Ainsi le lemme 8 est démontré.

Lemme 9. La famille $(V^*_p)_{p>0}$ est une résolvante markovienne.

Preuve. Pour $p > 0$, $q > 0$ et $\mu \in M^+_K(X)$ quelconques, on désigne par a'_p et par a'_q les constantes semi-balayées de μ sur X relativement à $(V^*+\frac{1}{p}I, V^*)$ et à $(V^*+\frac{1}{q}I, V^*)$ respectivement. Alors,

$$(V^*+\frac{1}{q}I)(V^*_p\mu - V^*_q\mu)$$

$$= (V^*+\frac{1}{p}I)V^*_p\mu - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})V^*_p\mu - (V^*+\frac{1}{q}I)V^*_q\mu$$

$$= \frac{1}{p}(V^*\mu - a'_p m) - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})V^*_p\mu - \frac{1}{q}(V^*\mu - a'_q m)$$

$$= \frac{p-q}{pq}(V^*_p\mu - V^*\mu) + (\frac{1}{q}a'_q - \frac{1}{p}a'_p)m.$$

Soit $a'_{p,q}$ une constante semi-balayée de $\frac{1}{q}V^*_p\mu$ sur X relativement à $(V^*+\frac{1}{q}I, V^*)$ (voir la remarque 7 (3)). Alors,

$$(V^*+\frac{1}{q}I)(V^*_qV^*_p\mu) = \frac{1}{q}V^*V^*_p\mu + a'_{p,q}m$$

$$= \frac{1}{pq}(V^*\mu - V^*_p\mu) - (\frac{1}{pq}a'_p - a'_{p,q})m,$$

et donc

$$(V^*+\frac{1}{q}I)(V^*_p\mu - V^*_q\mu - (q-p)V^*_qV^*_p\mu)$$

$$= (\frac{1}{q}a'_q - \frac{1}{p}a'_p + (q-p)(\frac{1}{pq}a'_p - a'_{p,q}))m$$

Comme $\int dV^*_p\mu - \int dV^*_q\mu - (q-p)\int dV^*_qV^*_p\mu = 0$, on a

(3.9) $$V^*_p\mu - V^*_q\mu = (q-p)V^*_qV^*_p\mu.$$

Par conséquent, $(V^*_p)_{p>0}$ est une résolvante. La markovienne de $(V^*_p)_{p>0}$ est évidente et l'on a le lemme 9.

Remarque 10. Pour tous $p > 0$ et $f \in C^0_K(X)$, l'égalité

$$(3.10) \qquad Vf(x) - V_p f(x) = pV_p Vf(x) \qquad (x \in X)$$

a lieu. En outre, la résolvante $(V_p)_{p>0}$ vérifiant (3.10) est uniquement déterminée.

Pour montrer la récurrence uniforme de $(V_p^*)_{p>0}$, on utilisera le lemme suivant.

Lemme 11. Pour $p > 0$ et $x \in X$ quelconques, $\mathrm{supp}(V_p^*\varepsilon_x) = X$.

Preuve. Posons $X_o = \mathrm{supp}(V_p^*\varepsilon_x)$ pour un nombre $p > 0$. Alors, d'après l'équation résolvante (3.9), on connaît bien que $\mathrm{supp}(V_q^*\varepsilon_x) = X_o$ pour tout $q > 0$. Comme $(qV_q^*\varepsilon_x)_{q>0}$ est vaguement bornée, il existe $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ et $\lambda \in M^+(X)$ telles que $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} q_n V_{q_n}^* \varepsilon_x = \lambda$ dans $M(X)$.

Supposons $\lambda = 0$ et $X \neq X_o$. Soit $f \in C_K^+(X)$ quelconque et $f_o \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}(f_o) \subset X\backslash X_o$ et à $\int f_o dm = 1$ fixée. Alors, $f-a_f f_o \in C_K^0(X)$, où $a_f = \int f dm$. Donc $V(f-a_f f_o) \in C_0(X)$ donne

$$\lim_{n\to\infty} q_n \int V(f-a_f f_o) dV_{q_n}^* \varepsilon_x = 0.$$

En vertu de (3.10), on a

$$\infty > V(f-a_f f_o)(x) = \lim_{n\to\infty} \int (f-a_f f_o) dV_{q_n}^* \varepsilon_x = \lim_{n\to\infty} \int f dV_{q_n}^* \varepsilon_x,$$

et donc $(V_{q_n}^* \varepsilon_x)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Comme

$$Vf(x) - V_{q_n} f(x) = q_n \int Vf dV_{q_n}^* \varepsilon_x + a_n' a_f$$

avec une constante $a_n' \leq 0$, il existe $M > -\infty$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$q_n \int Vf dV_{q_n}^* \varepsilon_x > M.$$

Comme $\lambda = 0$ et $q_n \int dV_{q_n}^* \varepsilon_x = 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} q_n \int Vf dV_{q_n}^* \varepsilon_x = -\infty$$

(voir la preuve de (3.7)), d'où une contradiction. On a ainsi $X_o = X$.

Supposons $\lambda \neq 0$. Soit $f \in C_K^0(X)$ quelconque. Comme $Vf \in C_0(X)$ et $\lim_{n\to\infty} (q_n)^2 V^*_{q_n} \varepsilon_x = 0$, on a

$$\int f d\lambda = \lim_{n\to\infty} q_n \int f dV^*_{q_n} \varepsilon_x$$

$$= \lim_{n\to\infty} (q_n Vf(x) - (q_n)^2 \int Vf dV^*_{q_n} \varepsilon_x) = 0,$$

et donc il existe $c > 0$ telle que $\lambda = cm$. Comme $\mathrm{supp}(V^*_{q_n} \varepsilon_x) \supset \mathrm{supp}(\lambda) = X$, on a $X_o = X$.

Remarque 12. Si $\int dm = \infty$, alors, pour toute $f \in C_K^0(X)$

(3.11) $\qquad \lim_{q\to 0} V_q f = Vf$ uniformément sur X.

En effet, soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ et $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ à $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ $(q_n > 0)$ quelconques. D'après (3.10), il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} q_n V^*_{q_n} \varepsilon_{x_n} = 0$. Soit λ un point vaguement adhérent quelconque de $(q_n V^*_{q_n} \varepsilon_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ lorsque $n \to \infty$. De la même façon que dans le preuve du lemme 11, on a $\lambda = cm$ avec une constante $c \geq 0$. Comme $\int d\lambda \leq 1$, $\lambda = 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} q_n V^*_{q_n} \varepsilon_{x_n} = 0$.

Lemme 13. La résolvante $(V^*_p)_{p>0}$ est uniformément récurrente.

Preuve. Soit $f_o \in C_K^+(X)$ à $\int f_o dm = 1$ fixée. D'après le lemme 11, on a $V_p f_o > 0$ sur X. De plus, $V_p f_o(x)$ converge d'une manière croissante vers ∞ lorsque $p \downarrow 0$ (voir encore la preuve du lemme 11). Donc, en posant

(3.12) $$u_p(x) = \frac{1}{V_p f_o(x)}$$

on obtient $(u_p)_{p>0} \subset C^+(X)$ et

(3.13) $\qquad \lim_{p\to 0} u_p = 0$ uniformément sur tout compact dans X,

d'après le théorème de Dini.

On montrera que $(u_p)_{p>0}$ est une famille des fonctons demandée. Soit $g \in C_K^+(X)$ à $\int g dm = 1$ quelconque. On va montrer que pour un compact K et $\varepsilon > 0$ quelconques, il existe $r_o > 0$ tel que

$$(3.14) \qquad |u_p V_p g - u_q V_q g| < \varepsilon \quad \text{sur } K$$

dès que $p, q \leq r_o$. En posant $\psi = f_o - g \in C_K^0(X)$, on a $\|V\psi\|_\infty < \infty$ et

$$\begin{aligned} &|u_p(x)V_p g(x) - u_q(x)V_q g(x)| \\ &= \left|\frac{V_p g(x) - V_p f_o(x)}{V_p f_o(x)} - \frac{V_q g(x) - V_q f_o(x)}{V_q f_o(x)}\right| \\ &\leq u_p(x)|V_p\psi(x)| + u_q(x)|V_q\psi(x)|. \end{aligned}$$

Comme $V\psi(x) - V_p\psi(x) = \int pV\psi dV_p^*\varepsilon_x$ et $\int dpV_p^*\varepsilon_x = 1$, on a $\|V_p\psi\|_\infty \leq 2\|V\psi\|_\infty$. On peut donc supposer $\|V\psi\|_\infty \neq 0$. D'après (3.13), il existe $r_o > 0$ tel que pour tout $p < r_o$

$$u_p(x) < \frac{\varepsilon}{4\|V\psi\|_\infty} \quad \text{sur } K.$$

Par conséquent, (3.14) a lieu, et donc la condition (c) de la définition 3 est vérifiée.

Comme $u_p(x)V_p f_o(x) \equiv 1$ sur X, la condition (d) de la définition 3 est évidemment vérifiée.

Lemme 14. Soit $p > 0$ quelconque. Toute la mesure invariante par rapport à pV_p^* est proportionnelle à m.

Preuve. On remarque d'abord que $(V_q^*)_{q>0}$ est uniformément récurrente si et seulement si pV_p^* est uniformément récurrente (pour la définition, voir [6], Définition 1 (2)). En utilisant le corollaire 13 dans [6], on obtient que le cone $H(pV_p^*)$ formé par des mesures invariantes par rapport à pV_p^* est à 1 dimension, et donc il suffit de montrer que $m \in H(pV_p^*)$. Pour $g \in C_K^+(X)$ quelconque, on choisit $c_g > 0$ telle que $g \leq c_g/u_p$ sur X, car $u_p > 0$ sur X. Donc, pour tout $0 < q < \frac{p}{2}$, on a

$$u_p(x)V_q g(x) \leq u_q(x)c_g \int V_p f_o dV_q^*\varepsilon_x$$
$$\leq c_g u_q(x)\frac{V_q f_o(x)}{p-q} \leq \frac{2c_g}{p},$$

et donc $(u_q(x)V_q^*\varepsilon_x)_{p/2>q>0}$ est vaguement bornée. Soit λ un point vaguement adhérent de la famille ci-dessus lorsque $q \to 0$. Comme $\lim_{q\to 0} u_q(x) = 0$, de la même manière que dans la preuve au cas $\lambda \neq 0$ dans le lemme 11. on a $\lambda = m$, car $\int f_o d\lambda = 1$. En faisant $q \downarrow 0$ dans l'égalité

$$u_q(x)V_q^*\varepsilon_x - u_q(x)V_p^*\varepsilon_x = (p-q)V_p^*(u_q(x)V_q^*\varepsilon_x),$$

on a $m \in D^+(V_p^*)$ et $m \geq pV_p^*m$. D'après la proposition 5 dans [6], on a $m \in H(pV_p^*)$, ce qui montre le lemme 14.

Soit $p > 0$ fixé. On montrera que V_p^* est un noyau de Hunt faiblement régulier. Pour cela, en utilisant le résultat de M. Itô ([2], p.304), il suffit de preuver que

(D.1) V_p et V_p^* vérifient le principe de domination[4],

(D.2) V_p^* est non-dégénérate, c'est-à-dire, pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$ quelconques, $V_p^*\varepsilon_x \neq 0$ et $V_p^*\varepsilon_y$ n'est pas proportionnel à $V_p^*\varepsilon_x$,

(D.3) pour un fermé $F \subset X$ et $f \in C_K^+(X)$ quelconques, la fonction V-réduite $H_F^{V_p f}$ de $V_p f$ sur F est semi-continue supérieurement et

---

(4) On dit que V_p (resp. V_p^*) vérifie le principe de domination si pour $f, g \in C_K^+(X)$ quelconques (resp. $\mu, \nu \in M_K^+(X)$ quelconques), $V_p f \leq V_p g$ sur X dès que $V_p f \leq V_p g$ sur supp(f) (resp. $V_p^*\mu \leq V_p^*\nu$ dès que $V_p^*\mu \leq V_q^*\nu$ dans un voisinage de supp(μ)).

$H_\infty^{V_pf}(x) = \inf\{H_{CK}^{V_pf}(x);\ K\text{: compact}\} = 0$ sur X[5].

On utilisera les lemmes suivants.

Lemme 15. Le noyau V_p^* possède la propriété de convergence dominée; c'est-à-dire, pour une suite $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset D^+(V_p^*)$ convergeant vaguement vers $\mu \in M^+(X)$ quelconque, $\mu \in D^+(V_p^*)$ et

$$(3.15) \qquad \lim_{n\to\infty} V_p^*\mu_n = V_p^*\mu$$

dès qu'il existe une suite $(\sigma_n)_{n=1}^\infty \subset M^+(X)$ et un compact $K \subset X$ vérifiant $\mathrm{supp}(\sigma_n) \subset K$, $\int d\sigma_n \le 1$ et $V_p^*\mu_n \le V_p^*\sigma_n$ dans X.

Preuve. Comme $(V_q^*)_{q>0}$ est markovienne, $\int d\mu_n \le \int d\sigma_n \le 1$ $(n \ge 1)$. En considerant $(\mu_n|_{\omega_n})_{n=1}^\infty$[6] au lieu de $(\mu_n)_{n=1}^\infty$, où $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ est une certaine exhaustion de X, on peut supposer que $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset M_K^+(X)$. Donc on a

$$(3.16) \qquad V^*\mu_n - V_p^*\mu_n = pV^*(V_p^*\mu_n) + a'_{\mu_n} m$$

avec une constante $a'_{\mu_n} \le 0$. On peut supposer que $(V_p^*\mu_n)_{n=1}^\infty$ et $(\sigma_n)_{n=1}^\infty$ convergent vers $\lambda \in M^+(X)$ et $\sigma \in M_K^+(X)$ respectivement. Alors $\lambda \le V_p^*\sigma$.

On montrera d'abord que

$$(3.17) \qquad (a'_{\mu_n})_{n=1}^\infty \text{ est bornée.}$$

---

[5] Une fonction semi-continue inférieurement u sur X est dite V_p-surmédiane si pour tous $x \in X$ et $\lambda \in M_K^+(X)$ vérifiant $V_p^*\lambda \le V_p^*\varepsilon_x$, on a $\int u\,d\lambda \le u(x)$. On dégigne par $S^+(V_p)$ l'ensemble des fonctions non-négatives et V_p-surmédianes. Pour un sous-ensemble A dans X et une fonction $g \ge 0$ sur A quelconques, on pose

$$H_A^g(x) = \inf\{u(x);\ u \in S^+(V_p),\ u \ge g \text{ sur } A\} \text{ sur } X$$

dès que $\{u \in S^+(V_p);\ u \ge g \text{ sur } A\} \ne \emptyset$. On dit que H_A^g est la fonction V_p-réduite de g sur A.

[6] Pour $\mu \in M(X)$ et un ensemble μ-mesurable A quelconques, on pose $\mu|_A = \mu$ sur A et $\mu|_A = 0$ sur CA.

Comme

(3.18) $$V^*\sigma_n - V_p^*\sigma_n = pV^*(V_p^*\sigma_n) + a'_{\sigma_n} m$$

avec une constante $a'_{\sigma_n} \le 0$ et $(a'_{\sigma_n})_{n=1}^{\infty}$ est bornée aussi bien que (3.3), on a

$$V^*(\sigma_n - pV_p^*\sigma_n - \mu_n + pV_p^*\mu_n) \ge (a'_{\sigma_n} - a'_{\mu_n})m,$$

et donc $a'_{\sigma_n} \le a'_{\mu_n} \le 0$, car $\int d(\sigma_n - pV_p^*\sigma_n - \mu_n + pV_p^*\mu_n) = 0$. Par conséquent, $(a'_{\mu_n})_{n=1}^{\infty}$ est aussi bornée.

On montrera ensuite que $(V^*(V_p^*\mu_n))_{n=1}^{\infty}$ est relativement compact dans $M(X)$. Soit $K \subset X$ un compact et $f_o \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}(f_o) \subset K$ et à $\int f_o dm = 1$. Il suffit de montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute $f \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}(f) \subset K$

(3.19) $$\sup_{n\ge 1} \left|\int Vf dV_p^*\mu_n\right| \le c\|f\|_\infty.$$

De la même façon que dans (3.6), il existe une constante $c_o > 0$ telle que $\|Vf - a_f Vf_o\|_\infty \le c_o\|f\|_\infty$, où $a_f = \int f dm$. On a donc

$$\left|\int Vf dV_p^*\mu_n\right| \le \left|a_f \int Vf_o dV_p^*\mu_n\right| + c_o\|f\|_\infty \int dV_p^*\mu_n$$

$$\le \|f\|_\infty (m(K)\left|\int Vf_o dV_p^*\mu_n\right| + \frac{1}{p}c_o),$$

car $0 \le a_f \le m(K)\|f\|_\infty$ et $\int dV_p^*\mu_n = \frac{1}{p}\int d\mu_n \le \frac{1}{p}$. En posant $K_o = \mathrm{supp}((Vf_o)^+)$, on a

$$\infty > \frac{1}{p}\|(Vf_o)^+\|_\infty \ge \int (Vf_o)^+ dV_p^*\mu_n$$

$$\ge \int Vf_o dV_p^*\mu_n$$

$$\ge \int_{CK_o} Vf_o dV_p^*\mu_n \ge \int_{CK_o} Vf_o dV_p^*\sigma_n \ge -\frac{1}{p}\|(Vf_o)^+\|_\infty + \int Vf_o dV_p^*\sigma_n$$

$$\ge -\frac{1}{p}\|(Vf_o)^+\|_\infty + \frac{1}{p}\inf_{x\in K}\{Vf_o(x) - V_p f_o(x) - a'_x\}$$

$$\geq -\frac{1}{p}\|(Vf_o)^+\|_\infty + \frac{1}{p}\inf_{x\in K}\{Vf_o(x) - V_pf_o(x)\} > -\infty$$

car $a'_x \leq 0$, où a'_x est la constante semi-balayée de ε_x sur X relativement à $(V^*+\frac{1}{p}I, V^*)$, d'où (3.19).

D'après (3.16), (3.17) et (3.19), on peut supposer que $V^*\mu_n$ converge vaguement, et donc $\mu \in D^+(V^*)$. De la même manière que dans (3.5), (3.7) et (3.8), on a $\lambda \in D^+(V^*)$, $\int dV_p^*\mu = \int d\lambda$ et il existe $a \in R$ telle que $(V^*+\frac{1}{p}I)\lambda = (V^*+\frac{1}{p}I)V_p^*\mu + am$ dans X. Donc la condition (B) dans le théorème donne $\lambda = V_p^*\mu$, d'où (3.15).

La condition (B) dans le théorème donnera encore le lemme suivant:

Lemme 16. Le noyau V_p^* possède la propriété de unicité, c'est-à-dire; pour toutes μ et $\nu \in D(V^*) \cap M_b^+(x)$, $\mu = \nu$ dès que $V_p^*\mu = V_p^*\nu$.

Lemme 17. Soit $p > 0$ fixé. Posons $U_q^* = V_{p+q}^*$ $(q > 0)$. Alors, pour $\mu \in M_K^+(X)$ quelconque, on a

(3.20) $$\lim_{q\to\infty} qU_q^*\mu = \mu \text{ (vaguement).}$$

Preuve. Soit λ un point vaguement adhérent quelconque de $(qU_q^*\mu)_{q>0}$ lorsque $q \to \infty$. Comme

$$V_p^*\mu - U_q^*\mu = qV_p^*U_q^*\mu \quad \text{et} \quad V_p^*(qU_q^*\mu) \leq V_p^*\mu,$$

on obtient que $V_p^*\mu = \lim_{q\to\infty} V^*(qU_q^*\mu) = V_p^*\lambda$, en faisant $q \to \infty$ et utilisant le lemme 15, et donc le lemme 16 donne $\mu = \lambda$, d'où (3.20).

Lemme 18. Le noyau V_p^* est un noyau de Hunt faiblement régulier.

En effet, la proposition 1 et la remarque 11 dans [2] et le lemme 17 montrent que V_p^* vérifie (D.1). On a déjà montré (D.2) dans les lemme 10 et lemme 15. D'après (D.1) et le lemme 13 dans [2], V_p^* vérifie (D.3).

Lemme 19. Il existe un markovien semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ des noyaux continus d'une manière unique tel que $V_p = \int \exp(-pt)T_t dt$.

Preuve. En vertu du lemme 18, on voit l'existence et l'unicité de $(T_t)_{t\geq 0}$ (voir la proposition 13 dans [1]).

Les présents lemmes et remarques sont tous les étapes de la preuve du théorème, et le théorème est définitivement établi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Itô: Sur les noyaux de convolution conditionnellement sous-médians II, Nagaoya Math. J., 75 (1979), 1-36.

[2] M. Itô: On weakly regular Hunt diffusion kernels, Hokaido Math. J., 10 (1981) sp., 303-335.

[3] M. Itô: Une caractérisation des noyaux de convolution réels de type logarithmique, Nagoya Math. J., (à paraître).

[4] M. Itô: Sur le principe semi-complet du maximum pour les noyaux de convolution réels, Nagoya Math. J., (à paraître).

[5] R. Kondo: On a constraction of recurrent Markov chains, Osaka J. of Math., 6 (1969), 13-28.

[6] N. Suzuki: Invariant measures for uniformly recurrent diffusion kernels, Hiroshima Math. J., (à paraître).